РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ АСТРОНОМИИ

Сообщения ИПА РАН N 76

Петров Л.Ю.

Вторичная обработка геодезических РСДБ наблюдений. Оценивание параметров модели.

Санкт-Петербург

Petrov L.Y.

Secondary data analysis of geodetic VLBI observations. Parameters estimation.

Abstract

Algorithms of estimation of the parameters of very long baseline interferometric (VLBI) observations obtained under geodetic programs are described. Methods of group delay ambiguity elimination, methods of determination of the parameters from observations carried on during one session and methods of simultaneous multisession parameters estimation are discussed. Methods of constructing of reference systems using VLBI observations are also discussed. These algorithms are used in software VORIN.

Аннотация

Описаны алгоритмы оценивания параметров модели радиоинтерферометрических наблюдений со сверхдлинными базами (РСДБ), выполненных по геодезическим программам. Обсуждаются методы удаления неопределённости в измерении групповой задержки, методы определения параметров по наблюдениям одной серии, и методы совместного оценивания параметров по наблюдениям многих серий. Обсуждается метод построения систем координат на основе РСДБ наблюдений. Предложенные алгоритмы использованы в программном комплексе ВОРИН.

1 Введение.

В настоящее время наблюдения компактных радиоисточников, выполненные на радиоинтерферометрических сетях со сверхдлинными базами (РСДБ), широко используются для решения задач астрометрии, геодезии и геодинамики: таких как построение фундаментальной системы координат на небе, создание опорной системы координат на Земле, мониторинг параметров вращения Земли (ПВЗ), прямое измерение тектонических движений плит. Однако для того, чтобы извлечь из РСДБ наблюдений интересующие нас параметры с той точностью, которую этот метод может потенциально обеспечить, требуется трудоёмкая процедура анализа данных.

Кратко рассмотрим принцип работы простейшего радиоинтерферометра (см. рис. 1). Каждая станция оснащена параболической антенной, независимым стандартом частоты, системой приёма, преобразования и регистрации сигнала. По заранее составленной программе станции одновременно наблюдают в течение определённого промежутка времени один и тот же компактный радиоисточник — обычно это квазар или радиогалактика. Принятый на каждой антенне сигнал усиливается, преобразуется к низкой частоте, оцифровывается и записывается на магнитную ленту. На магнитную ленту также записываются метки времени от местного стандарта частоты, калибровочные параметры и некоторая другая служебная информация. Затем ленты свозятся в центр обработки, где проводится первичный анализ. На стадии первичной или радиотехнической обработки на специализированном процессоре вычисляется взаимнокорреляционная функция сигналов. Строится зависимость взаимнокорреляционной функции от дифференциальной временно́й задержки распространения сигналов, рассчитанной на основе записанных временны́х меток, и находится максимум этой зависимости. В результате первичной обработки для каждого наблюдения определяются 4 параметра: групповая временна́я задержка, частота интерференции — скорость изменения фазовой задержки, амплитуда и фаза функции взаимной когерентности. Амплитуда и фаза функции когерентности при обработке геодезических РСДБ наблюдений не используются.

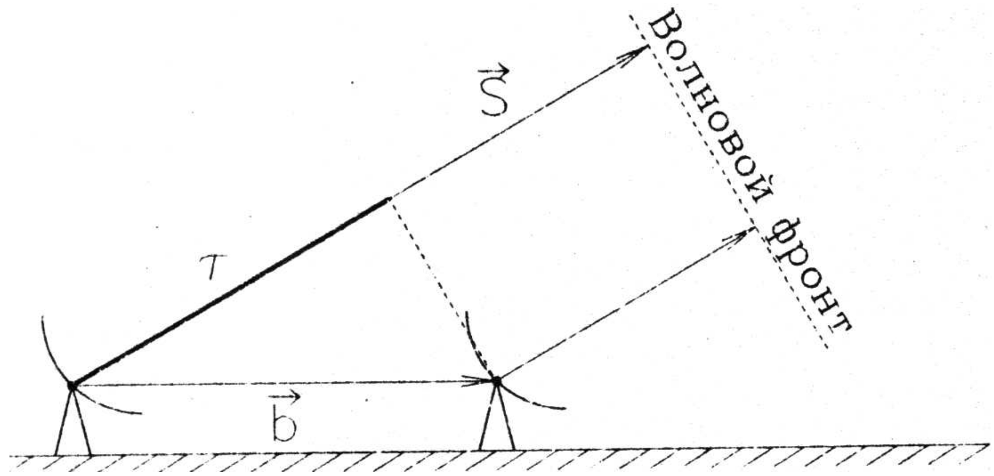


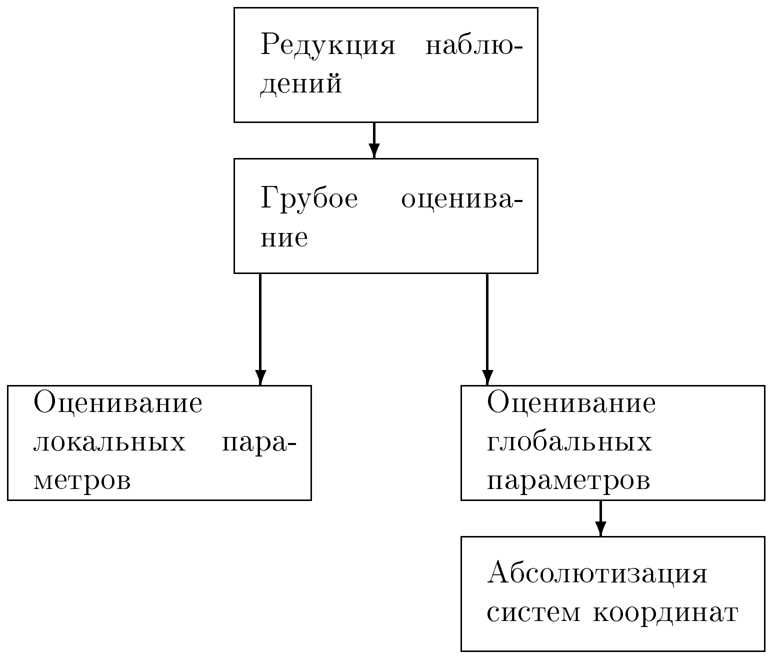
Рис. 1 Схема простейшего радиоинтерферометра.

Так как расстояние до наблюдаемого источника существенно больше расстояния между станциями, волновой фронт можно считать плоским. Тогда в первом приближении задержку можно выразить в виде (см. рис. 1):

$$\tau = \frac{1}{c}\vec{\mathbf{b}} \cdot \underline{\vec{\mathbf{S}}} \qquad (1)$$

где τ — задержка, $\vec{\mathbf{b}}$ — вектор базы, $\underline{\vec{\mathbf{S}}}$ — единичный вектор направления на источник, с — скорость света.

Одновременно источник наблюдается на нескольких станциях (число станций, принимающих участие в наблюдениях по геодезическим программам в одной серии варьирует от 2 до 8). Время, в течение которого записывается сигнал радиоисточника, обычно составляет 30–600 секунд в зависимости от яркости источника и чувствительности антенн. После записи сигнала одного источника антенны переводятся на другой источник. Обычная продолжительность одного РСДБ эксперимента 24 часа. За это время на одной станции удаётся выполнить от 50 до 200 наблюдений. За сутки на всех базах сети собирается от 200 до 3500 наблюдений нескольких десятков радиоисточников. Обработку геодезических РСДБ наблюдений можно описать следующей схемой:



На первом шаге строится максимально точная модель наблюдений. Во время редукционной обработки на основе априорных значений параметров модели предвычисляются теоретические значения задержки (τ) и частоты интерференции (F): $\tau_c = f(\Pi_0), F = g(\Pi_0)$. Подробное описание модели можно найти в [1], [2], а также в [3], [4]. Наряду с задержкой и частотой интерференции вычисляются частные производные по параметрам модели от этих величин. Тогда, пренебрегая вторыми производными, разность наблюдённых и предвычисленных значений задержки и частоты интерференции для каждого наблюдения можно выразить в виде:

$$\begin{aligned} \tau_{o-c} &= \frac{\partial f}{\partial \Pi} \Delta \Pi \\ F_{o-c} &= \frac{\partial g}{\partial \Pi} \Delta \Pi \end{aligned} \qquad (2)$$

Объединив все или часть имеющихся в распоряжении наблюдений, мы можем решить уравнения и найти поправки к параметрам модели. В секции 2 описан метод грубого оценивания параметров, во время которого находятся предварительные значения рассинхронизации и дрейфа часов на каждой станции, исключается неопределённость измерения групповой задержки и находятся наиболее значительные выбросы. В 3-й секции описаны методы оценивания параметров на основе одной (как правило 24-х часовой) серии наблюдений. В секции 4 описан метод оценивания "глобальных"параметров, то есть параметров, не меняющихся от серии к серии, по всей совокупности наблюдений. Наконец, в 5-й серии обсуждается процедура абсолютизации каталогов координат станций и источников, а также поля скоростей, полученных в результате глобального оценивания параметров.

2 Грубое оценивание.

На рисунках 2–5 изображены типичные графики o-c групповой задержки (в наносекундах) для одной из баз, полученные во время 24-х часовых серий, выполненных по программе IRIS. Перед построением графиков для удобства от всех o-c было отнято значение o-c первого наблюдения.

87FEB07X Westford–Wettzell

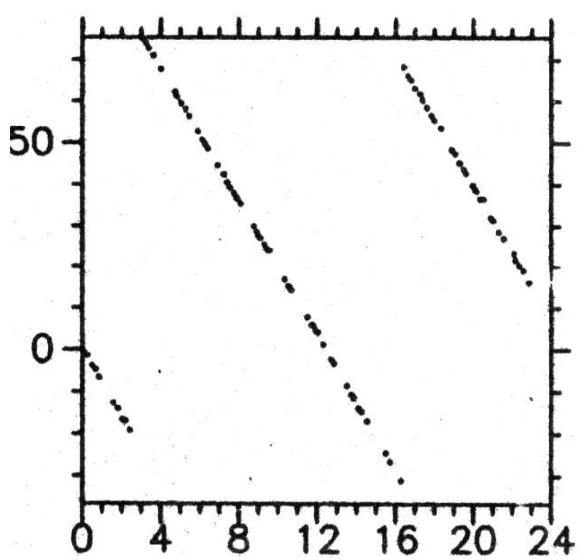


Рис. 2

87JUN27X Westford–HRAS 085

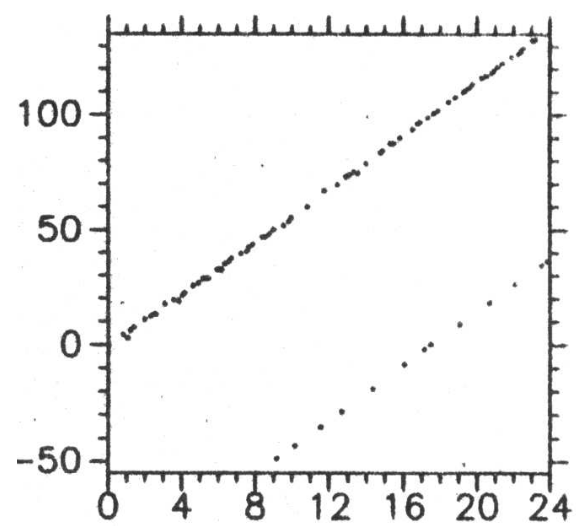


Рис. 3

87AUG26X Westford–HRAS 085

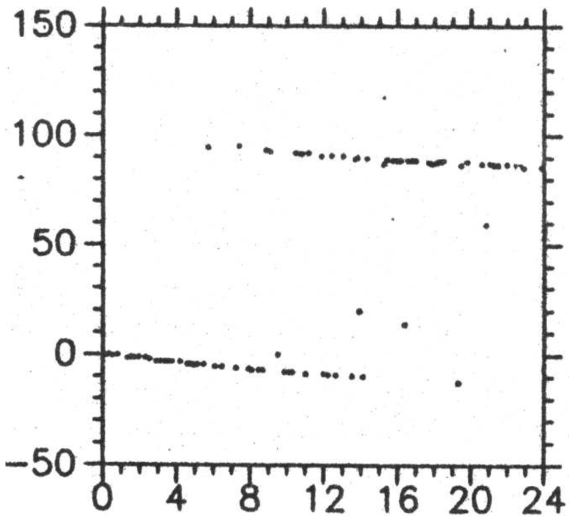


Рис. 4

87NOV09XA Westford–Onsala 60

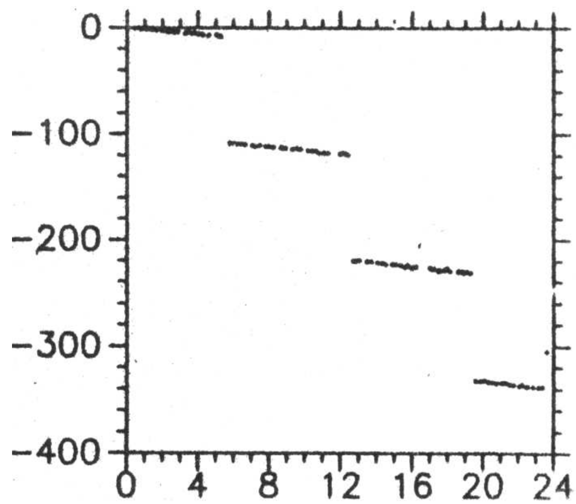


Рис. 5

Проанализировав графики, мы можем выделить следующие черты:

- О-С имеет скачки, кратные 100 наносекундам. Эти скачки обусловлены тем, что групповая задержка, полученная методом синтеза широкой полосы, может быть измерена с неопределённостью, обратно пропорциональной минимальной разности частот между каналами полосы синтеза. Для системы MARK-III эта величина обычно составляет 10 Мгц, что и приводит к неопределённости 100 наносекунд.

- О-С группируются вдоль отрезков прямых линий. Это является следствием того факта, что основной вклад в о-с вносит рассинхронизация и дрейф часов станций, потому что в отличие от геодезических параметров мы, как правило, не имеем априорных оценок функции часов. Характерный вклад в о-с от параметров рассинхронизации часов составляет $1–10 \cdot 10^{-6}$ секунды, от параметров дрейфа часов — $0.2–2 \cdot 10^{-7}$, от параметров тропосферной задержки в зените — $1–5 \cdot 10^{-9}$ секунды, а вклад геодезических параметров, которые нас собственно и интересуют, обычно не превышает $5 \cdot 10^{-10}$ секунды, так как в большинстве случаев мы имеем достаточно хорошие априорные значения этих параметров.

- Существуют точки, которые сильно отклоняются от основной массы наблюдений. Величины отклонений таких выбросов могут иметь произвольное значения. Эти точки свидетельствуют о нештатной работе аппаратуры, и они должны быть отброшены перед обработкой, иначе их наличие может существенно исказить решение.

На первом шаге оценивания параметров РСДБ наблюдений — назовём его грубым оцениванием, необходимо разрешить неопределённость в измеренной групповой задержке, удалить выбросы, а также найти предварительные значения рассинхронизации и дрейфа хода часов станций. Для решения такой задачи предлагается следующий алгоритм, определяющий рассинхронизацию часов, скорость дрейфа хода часов, скорость дрейфа частоты на всех станциях, а также вычисляющий функцию скачка часов — коррекцию, которую следует прибавить к наблюдению, чтобы исключить скачок в о-с из-за неопределённости измерения групповой задержки.

I. *Разрешение неопределённости групповой задержки для наблюдений, выполненных на одной базе.* Разделим полный массив данных на подмножества наблюдений, выполненных на одной базе. Для каждого такого подмножества выполним следующие операции:

   1. Найдём параметры линейного тренда для частоты интерференции. Так как частота интерференции в отличие от задержки не содержит неопределённости, то она может быть использована для нахождения предварительных значений параметров часов станций, образующих рассматриваемую базу. Опишем о-с по частоте интерференции моделью $F = b + c\,t$. При условии, что весь бюджет о-с как по задержке, так и по частоте интерференции определяется только параметрами часов станций, коэффициенты b и c, найденные из частоты интерференции, соответствуют коэффициентам следующей модели о-с групповой задержки: $\tau = a + b\,t + \frac{1}{2}c\,t^2$. Следовательно, определив параметры линейного тренда от о-с частоты интерференции, мы можем по ним найти линейный и квадратичный член функции часов о-с задержки. Принята следующая процедура нахождения параметров тренда частоты интерференции:

      1.1. Сканируется массив о-с и последовательно находятся такие пары значений F для смежных интервалов времени, разность значений которых по модулю превышает некоторое пороговое значение F_t. Обе такие точки удаляются из последующей обработки. Рекомендуемое значение F_t — $7 \cdot 10^{-12}$

   1.2. Находятся коэффициенты b, c по методу наименьших квадратов.

   1.3. Сканируется массив о-с и ищутся те точки, чьё отклонение от прямой линии с найденными коэффициентами в 3 и более раз превышает среднеквадратическое уклонение. Если такие точки находятся, то вычислятся коррекция коэффициентов за удаление выбросов, и данная операция выполняется до тех пор, пока на очередном шаге не будет обнаружено ни одного выброса.

2. Вычтем из о-с задержки линейный и квадратичный тренд.

3. Разобьём массив о-с задержки на сегменты, такие, что максимальная разность о-с для каждой из точек, входящих в сегмент, и среднего по этим точкам, не превышает по модулю некоторого порогового значения τ_t. Рекомендуемое значение τ_t — $6 \cdot 10^{-9}$ сек. Для этого сканируется массив о-с и выполняются следующие операции:

   3.1. Первая точка заносится в первый сегмент.

   3.2. Начиная со второй точки проверяется каждый сегмент. Если $|\tau_i - \overline{\tau_s}| < \tau_t$ (где $\overline{\tau_s}$ — среднее по s-му сегменту), то i-ая точка добавляется к s-му сегменту и обновляется среднее. Если не находится ни одного сегмента, для которого выполнялось бы данное условие, то заводится новый сегмент.

4. Определяется сегмент, который содержит максимальное количество точек. Среднее от о-с по точкам, входящим в данный сегмент, даст нам первое приближение для значения рассинхронизации часов базы. Для точек, входящих в данный сегмент, установим значение функции скачка, равное 0.

5. Сканируем массив о-с и для точек, не входящих в максимальный сегмент, выполняем следующие операции:

5.1. Находим значение скачка для данного наблюдения:

$$J_i = \text{Entier}(\frac{\tau_i - \overline{\tau}}{S})$$

где S — постоянная неопределённости, а символом Entier обозначена операция выделения целой части. В случае, если $|\tau_i + J_i S - \overline{\tau}| > \tau_t$, данное наблюдение отмечается как выброс и не участвует в дальнейшей обработке.

5.2. Обновляем среднее $\overline{\tau_{n+1}} := \dfrac{n\overline{\tau_n} + \tau_i}{n+1}$

II. *Привязка неопределённости групповой задержки к часам станций.* Вычислив функцию часов для каждой базы, нам следует найти функцию часов для всех станций, кроме станций, часы которых выбраны в качестве опорных. Следует заметить, что рассинхронизация часов, найденная для каждой базы, имеет неопределённость, кратную S (если ко всем значениям функции скачков базы прибавить iS, а от рассинхронизации часов отнять iS, то результат не изменится). Теперь необходимо для каждой базы найти коррекцию неопределённости рассинхронизации. Предлагается следующий алгоритм:

1. Инициализация. Устанавливаем признак просмотра станций в состояние "не просмотрена". Устанавливаем значение неопределённости рассинхронизации для всех баз, равное нулю.

2. Цикл по всем станциям: $i = 1, 2 \ldots$

2.1. Если станция уже просмотрена — переход к следующей станции.

2.2. Принимаем i-ую станцию за опорную. Устанавливаем рассинхронизацию часов для опорной станции равной нулю: $A_i := 0$. Устанавливаем признак просмотра i-й станции в состояние "не просмотрена".

2.3. Цикл по всем базам: $j = 1, 2 \ldots$ В зависимости от того, были ли просмотрены станции k1 и k2, определяющие j-ую базу, выполняем следующие операции:

2.4. Станция k1 не просмотрена, а станция k2 просмотрена. Определяем рассинхронизацию часов станции k1: $A_{k1} = A_{k2} - a_j$ Устанавливаем признак просмотра i-й станции в состояние "не просмотрена".

2.5. Станция k2 не просмотрена, а станция k1 просмотрена. Определяем рассинхронизацию часов станции k2: $A_{k2} = A_{k1} + a_j$ Устанавливаем признак просмотра i-й станции в состояние "не просмотрена".

2.6. Обе станции просмотрены. Находим неопределённость рассинхронизации часов j-й базы:

$$K_j = \mathrm{Entier}\left(\frac{a_j - (A_{k2} - A_{k1})}{S}\right)$$

Корректируем значение рассинхронизации часов j-й базы: $a_j := a_j - SK_j$

3. Коррекция значений скачков функции часов для всех наблюдений серии за неопределённость рассинхронизации часов базы: $J_i := J_i - SK_j$.

3 Оценивание параметров по наблюдениям одной серии.

После выполнения коррекции за неопределённость измерения групповой задержки и коррекции за предварительные значения функции часов можно приступить к точному оцениванию параметров модели РСДБ наблюдений. В стандартном решении оцениваются следующие параметры:

- Координаты станций или координаты векторов баз.
- Координаты источников.
- Параметры вращения Земли: $UT1, \dfrac{\partial}{\partial t}UT1, X_p, Y_p, \Delta\psi, \Delta\varepsilon$.
- Тропосферная задержка в зените.
- Функция часов.

В специальном решении могут оцениваться также такие параметры, как числа Лява h_2 и ℓ_2, релятивистский параметр γ, параметры разложения близсуточных вариаций $UT1$ и координат полюса, коэффициенты разложения нутации и другие величины.

Процедура оценивания состоит из следующих шагов:

1. Формирование запроса на оценивание, описывающего модель наблюдений, параметры оценивания, тип параметризации, объекты, которые описывают оцениваемые параметры.
2. Вычисление границ сегментов для тех параметров, которые предполагаются меняющимися на интервале оценивания.
3. Формирование на основе запроса на оценивание полного списка определяемых параметров.
4. Вычисление масштабирующих коэффициентов.
5. Составление системы условных уравнений.
6. Составление системы уравнений условий связи и системы уравнений стабилизирующих ограничений.
7. Решение системы условных уравнений с условиями связи и стабилизирующими ограничениями по взвешенному методу наименьших квадратов.
8. Вычисление статистики решения, нахождение выбросов. Если находятся наблюдения, которые по выбранному критерию относятся к выбросам, производится коррекция решения за выбросы и перевычисляется статистика.
9. Если оценка математического ожидания суммы квадратов остаточных невязок сильно отличается от найденной суммы квадратов, то производится коррекция весов и выполняется новое решение.

Рассмотрим теперь подробнее каждый из шагов.

3.1 Формирование списка оцениваемых параметров.

В запросе на оценивание указывается не один параметр, а целая группу параметров. Например, оценивание "координат станций"предполагает нахождение компонент вектора координат для всех или некоторых станций, участвовавших в наблюдениях. Кроме того, координаты станций или координаты вектора баз можно по-разному параметризовать: можно оценивать декартовы координаты станций — X, Y, Z компоненты, можно оценивать координаты каждой станции в локальной топоцентрической системе координат: вертикальную, восточную, северную компоненты и т.п. Тропосферная задержка в зените и функция часов для каждой станции обычно предполагаются изменяющимися в течение 24-х часовой серии. Интервал наблюдения разбивается на 1-2 часовые сегменты, в течение которых параметры тропосферы и часов предполагаются изменяющимися по линейному закону. В разных сериях участвуют различное количество станций, баз, источников; продолжительность наблюдений на разных станциях тоже как правило различается и, следовательно, количество сегментов для оценивания тропосферной задержки в зените и функции часов также различное. Задавать непосредственно для каждой серии список параметров оценивания было бы затруднительно, поэтому запрос на оценивание должен содержать "обобщённый параметр"и указание как его "расщепить"в группу параметров, которые непосредственно будут определяться. Каждый обобщённый параметр имеет свои правила расщепления. Расщепление различных параметров можно представить следующей схемой.

- Координаты станций.
  - расщепление по станциям;
  - оценивание компонент вектора координат;
  - оценивание также и компонент скорости координат станции.
- Координаты вектора базы.
  - расщепление по базам;
  - оценивание компонент векторов баз;
  - оценивание также и компонент скорости изменения векторов баз;
- Координаты источников.
  - расщепление по источникам;
  - оцениваются прямое восхождение и склонение источников.

- Числа Лява. Расщепление не производится.
- Параметры вращения Земли. Для UT1 и координат полюса могут оцениваться также и их скорости изменения.
- Тропосферная задержка в зените и функция часов. Расщепление производится:
  - по станциям (При оценивании функции часов одна или несколько станций должны быть выбраны в качестве опорных и не оцениваться);
  - по сегментам либо
  - оценивание самого параметра и скорости его изменения.

3.2 Параметризация задачи.

Модель оценивания допускает различную параметризацию.

Поправки к координатам станций могут оцениваться в следующих системах координат:

- в декартовой системе координат (X, Y, Z координаты);
- в VEN-системе: оцениваются вертикальная, восточная и северная компонента вектора координат станций в локальной топоцентрической системе координат;
- в полярной системе координат: оцениваются радиус вектор, широта и долгота станции.

При оценивании вектора базы поправки могут определяться в следующих системах координат:

- в декартовой системе координат (X, Y, Z координаты);
- в LTV-системе: для каждой базы оцениваются длина базы, трансверсальная и вертикальная компоненты вектора. Орт трансверсальной компоненты лежит в плоскости, перпендикулярной геоцентрическим векторам станций. Орт вертикальной компоненты перпендикулярен вектору базы и направлен вдоль радиус-вектора в сторону от центра Земли.
- цилиндрическая система координат: полярная, экваториальная компонента вектора базы и долгота базы.

При моделировании какого-либо параметра линейным сплайном выбирается следующая параметризация: параметрами, которые оцениваются, являются граничные точки излома ломаной прямой. Для каждого момента времени оцениваются параметры сплайна, соответствующие начальной и конечной границе сегмента, к которому принадлежит данный момент времени.

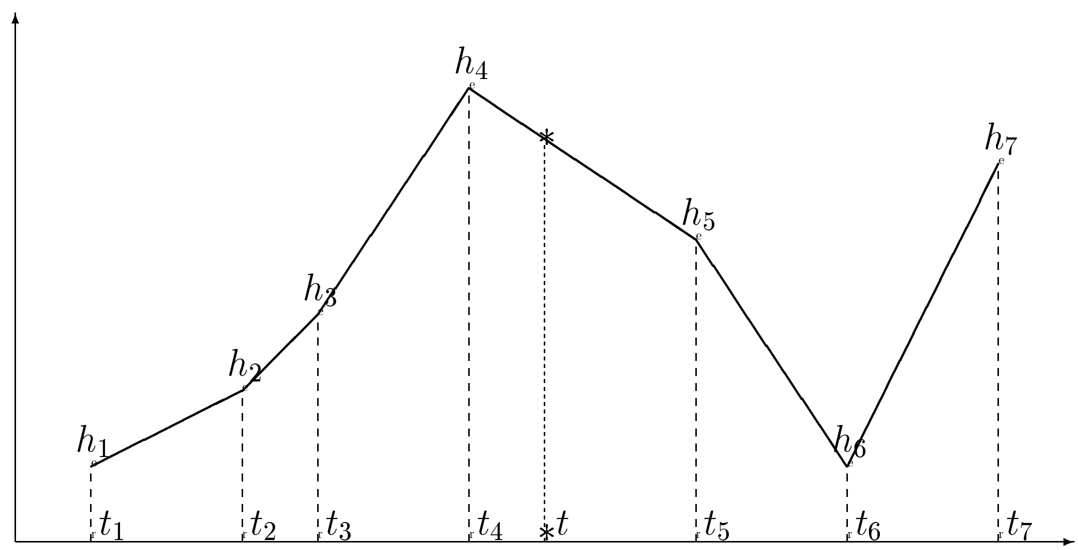


Рис. 6   Параметризация линейным сплайном.

Значение параметра П на i-м сегмента определяется следующим образом:

$$\Pi(i) = h_i \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \; + \; h_{i+1} \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}$$

где h_j — значение параметра на j-й границе интервала сегмента, t_j — момент времени, соответствующий j-й границе интервала. Данный способ моделировать ломаную прямую является предпочтительным, потому что матрица нормальных уравнений, соответствующая блоку параметров линейного сплайна, содержит много нулей и имеет ленточную структуру.

3.3 Составление нормальных уравнений.

Для того чтобы избежать проблем с численной неустойчивостью процедуры решения условных уравнений, следует масштабировать параметры оценивания и правые части. Специально подбираются такие множители при параметрах и правых частях, чтобы коэффициенты матрицы условных уравнений и вектора правых частей были близки к 1.

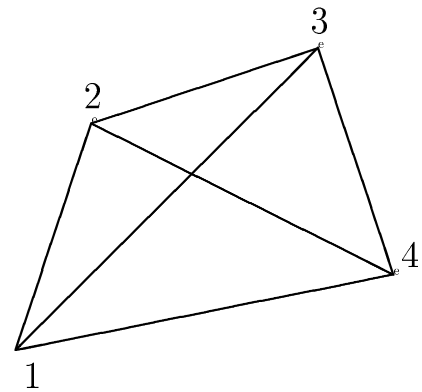
Для решения системы условных уравнений применяется взвешенный метод наименьших квадратов с условиями связи и стабилизирующими ограничениями. Вес каждого наблюдения определяется как

$$w = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{snr}^2 + \sigma_{ion}^2 + \sigma_{apr}^2}} \tag{3}$$

где σ_{snr} — среднеквадратическая ошибка измерения групповой задержки, вычисленная по соотношению сигнал-шум функции когерентности, σ_{ion} — среднеквадратическая ошибка определения ионосферной задержки, σ_{apr} — априорная коррекция погрешности измерения групповой задержки. Оценка ошибки определения задержки обычно оказывается заниженной, так как не учитываются другие факторы, влияющие на задержку, например, флуктуации электрической длины тропосферы, а также систематические ошибки модели наблюдения. Для компенсации неучтённых погрешностей наблюдений ко всем значениям неопределённости квадратически добавляется постоянная эмпирическая поправка σ_{apr}^2. На первом шаге оценивания выбирается произвольное значение поправки в пределах от 20 до 80 пикосекунд. На следующих итерациях решения эта величина уточняется, и произвол в выборе σ_{apr}^2 исчезает (хорошо угаданное значение коррекции потребует меньшего количества итераций). Если не производить коррекцию веса, мы получим во-первых, нереалистичные оценки погрешности определения параметров, во-вторых, в решении будут доминировать несколько сильных радиоисточников с большим отношением сигнал-шум, что приведёт к появлению нежелательных сильных корреляций между значениями оценок параметров.

Часть параметров модели связана линейной зависимостью. Такие зависимости можно представить в виде $Cx = r$, где x — вектор параметров размерностью m, r — вектор правых частей линейных соотношений размерностью q, C — матрица условий связи. Можно потребовать сохранения этих линейных зависимостей и для оценок параметров, то есть искать такие значения оценки, которые минимизируют сумму квадратов взвешенной невязки при условии, что ограничения $Cx = r$ выполняются строго. Такие ограничения мы назовём условиями связи. Алгоритм нахождения оценок МНК с подобного рода ограничениями приведён в приложении А.

При оценивании координат векторов баз или скоростей изменения векторов баз можно наложить ограничения на соотношения замыкания треугольников для каждой из компоненты вектора. Так, если наблюдения проводились на четырёх станциях 1,2,3,4, то мы имеем четыре следующих соотношения:



$$
\begin{aligned}
r_{12} - r_{13} + r_{23} = 0 \\
r_{12} - r_{14} + r_{24} = 0 \\
r_{13} - r_{14} + r_{34} = 0 \\
r_{23} - r_{24} + r_{34} = 0
\end{aligned}
$$

Обратим внимание на то, что из четырёх приведённых соотношений только три являются линейно независимыми. Так например, четвёртое соотношение можно получить, сложив первое и третье и вычтя второе уравнение. Можно показать, что если в наблюдениях участвовало N станций, и наблюдения проводились на всех базах, то всего мы будем иметь $\frac{N(N-1)(N-2)}{6}$ замкнутых треугольника, причём из них только $\frac{(N-1)(N-2)}{2}$ будут линейно независимыми. При составлении уравнений условий связи только линейно независимые уравнения должны приниматься во внимание. Использование других ограничений разбирается в разделе 5.

При моделировании N-сегментным линейным сплайном тропосферной задержки в зените и функции часов мы сталкивается с таким явлением, что оценки параметров становятся неустойчивыми и приобретают пилообразный характер. Скорость изменения тропосферной задержки определяется турбулентностью в атмосфере и не может быть произвольно большой. Также не могут быть произвольно большими флуктуации хода часов на станции. Наличие сильных, нефизичных флуктуаций в решении обусловлено во-первых, чувствительностью к шуму оценки параметра на коротком сегменте — на один сегмент может приходиться мало наблюдений, а во-вторых, сильными корреляциями оценок сегментированных параметров между собой. Чтобы уменьшить флуктуации оценок, накладываются специальные ограничения — мы назовём их стабилизирующими, которые обеспечивают более гладкое решение.

Предлагаются стабилизирующие ограничения для оценок параметров линейного сплайна в следующей форме: для каждой пары смежных сегментов накладывается условие равенства коэффициента наклона отрезков прямой. Эти условия могут быть записаны в таком виде:

$$(t_{i+2} - t_{i+1})h_i - (t_{i+2} - t_i)h_{i+1} + (t_{i+1} - t_i)h_{i+2} = 0 \quad (4)$$

Для N-сегментного линейного сплайна мы имеет N-1 стабилизирующих ограничений. При оценивании мы не требуем, чтобы эти условия выполнялись строго, как условия связи. Уравнениям ограничений присваивается определённый вес. Для нахождения оценок со стабилизирующими ограничениями модифицируем функционал качества метод наименьших квадратов:

$$J = (y - Ax)^{\top} \alpha^{-1} (y - Ax) + (z - Bx)^{\top} \beta^{-1} (z - Bx) \quad (5)$$

здесь y — вектор о-с, A — матрица условных уравнений, x — вектор параметров, α — априорная матрица ковариации шума, B — матрица стабилизирующих ограничений, z — вектор правых частей стабилизирующих ограничений (в нашем случае нулевой), β — априорная матрица ковариации стабилизирующих ограничений.

Матрица ковариации стабилизирующих ограничений принимается диагональной, с элементами вида $\sigma_r(t_{j+1} - t_j)$, где t_j — время начала j-го сегмента, которому соответствует уравнение ограничения, σ_r — величина ограничения на скорость изменения параметра. Чем больше σ_r, тем слабее влияние стабилизирующего ограничения на решение; в пределе мы получаем решение совпадающие с таким, которое было бы получено стандартным МНК. Чем меньше σ_r, тем сильнее влияние стабилизирующего ограничения; в пределе стабилизирующее ограничение вырождается в условие связи. В этом случае линейный сплайн вырождается в наклонную прямую. Такое решение эквивалентно выбору параметризации для данного параметра не линейным сплайном, а средним значением параметра на интервале наблюдения и скорости его изменения, усреднённой по всему интервалу. На практике берётся такое значение σ_r, которое с одной стороны допускает определённую свободу эволюции оцениваемого параметра, но с другой стороны не препятствует сильным, нефизичным вариациям. Из метеорологических наблюдений известно [5], [6], что за исключением катастрофических атмосферных процессов, скорость изменения тропосферной задержки в зените не превышает 100 пикосекунд в час, а характерная скорость изменения на порядок ниже. Также из сличений часов была найдена верхняя граница возможных флуктуаций хода часов: 3–$8 \cdot 10^{-14}$. Рекомендуемые значения σ_r — 50 пикосекунд в час для тропосферной задержки в зените и $5 \cdot 10^{-14}$ секунд в час для функции часов.

3.4 Решение условных уравнений.

Если не накладывается никаких ограничений, то решение условной системы уравнений по взвешенному методу наименьших квадратов находится в виде

$$\hat{x} = (A^{\top}\alpha^{-1}A)^{-1}A^{\top}\alpha^{-1}y \tag{6}$$

Нетрудно показать, что при наложении стабилизирующих ограничений оценка, которая минимизирует функционал J из (5), записывается в виде

$$\hat{x} = (A^{\top}\alpha^{-1}A + B^{\top}\beta^{-1}B)^{-1}(A^{\top}\alpha^{-1}y + B^{\top}\beta^{-1}z) \tag{7}$$

Мы видим, что наложение стабилизирующих ограничений, приводит к тому, что вносится коррекция в матрицу нормальных уравнений и в нормальный вектор. Оценка при наличии условий связи (см. приложение А) записывается либо в форме

$$\hat{x} = \left(N^{-1} - N^{-1}C^{\top}\left(CN^{-1}C^{\top}\right)^{-1}CN^{-1}\right)\mathbf{b} + N^{-1}C^{\top}\left(CN^{-1}C^{\top}\right)^{-1}\mathbf{r} \tag{8}$$

когда матрица N^{-1} существует, либо в форме

$$\begin{aligned} \hat{x} = {} & ((N + C^{\top}C)^{-1} - \\ & (N + C^{\top}C)^{-1}C^{\top}\Big(C(N + C^{\top}C)^{-1}C^{\top}\Big)^{-1}C(N + C^{\top}C)^{-1})\mathbf{b} + \\ & (N + C^{\top}C)^{-1}C^{\top}\Big(C(N + C^{\top}C)^{-1}C^{\top}\Big)^{-1}\mathbf{r} \end{aligned} \tag{9}$$

когда матрица N^{-1} не существует, но существует $(N + C^{\top}C)^{-1}$. Здесь N — матица нормальных уравнений ($N = A^{\top}\alpha^{-1}A$), $\mathbf{b}$ — нормальный вектор ($\mathbf{b} = A^{\top}\alpha^{-1}y$), C — матрица условий связи, $\mathbf{r}$ — вектор правых частей уравнений ограничений. При наложении и условий связи, и стабилизирующих ограничений, как нетрудно убедиться, оценка может быть найдена по формулам (8) или (9), где и нормальная матрица, и нормальный вектор будут скорректированы за стабилизирующие ограничения, т.е. вместо N будет подставлена $\tilde{N} = A^{\top}\alpha^{-1}A + B^{\top}\beta^{-1}B$, а вместо $\mathbf{b}$ — $\tilde{\mathbf{b}} = A^{\top}\alpha^{-1}y + B^{\top}\beta^{-1}z$. Нетрудно найти ковариационную матрицу оценок при условии, что обратная матрица весов α^{-1} равняется ковариационной матрице шума. В случае, если не накладывались условия связи, ковариационная матрица оценок есть $\tilde{N}^{-1}$. При наложении условий связи ковариационная матрица оценок есть матрица, записанная слева от $\mathbf{b}$ в выражениях (8), (9).

3.5 Нахождение статистики решения и перевзвешивание.

После вычисления оценок находим невязки и определяем взвешенное среднеквадратическое уклонение невязок. Находим те наблюдения, для которых взвешенная невязка превосходит в I раз среднеквадратическое уклонение (обычно I=3). Если такие наблюдения удаётся обнаружить, то их отмечаем как выбросы. Наличие сильных выбросов может исказить как само решение, так и оценку дисперсии неизвестных. Если таких выбросов немного, то можно выполнить коррекцию оценок параметров и матрицы ковариации оценок, не находя решение заново. Нормальная матрица без k-го уравнения N_r будет иметь вид:

$$N_r = N - a_k w_k a^{\top}{}_k \tag{10}$$

где a_k — вектор k-го отбрасываемого уравнения, w_k — его вес, N — полная обратная матрица.

Воспользовавшись леммой об обращении расширенной матрицы [7], выразим матрицу, обратную N_r через N^{-1}:

$$V_r = V + \frac{V a_k w_k a^{\top}{}_k V}{1 + w_k a^{\top}{}_k V a_k} \tag{11}$$

где V — матрица ковариации, полученная при оценивании по всем наблюдениям, V_r — матрица ковариации без k-го уравнения. Используя выражение (11), нетрудно найти коррекцию к оценкам параметров:

$$\hat{\mathbf{x}}_r = \hat{\mathbf{x}} - V a_k w_k \frac{y_k - a_k \hat{\mathbf{x}}}{1 + w_k a^{\top}{}_k V a_k} \tag{12}$$

где $\hat{\mathbf{x}}$ — вектор оценок, полученный при оценивании по всем наблюдениям, $\hat{\mathbf{x}}_r$ — вектор оценок без k-го уравнения. После выполнения коррекции за выброс вычисляем заново невязки и повторяем поиск аномальных наблюдений. Когда найдены все выбросы, можно выполнить коррекцию веса.

Преобразуем взвешенную сумму квадратов остаточных невязок $R = (A\hat{x} - y)^{\top} \alpha^{-1} (A\hat{x} - y)$ к такому виду:

$$\begin{aligned} R \;&=\; (\varepsilon - A V A^{\top} \alpha^{-1} \varepsilon)^{\top} \alpha^{-1} (\varepsilon - A V A^{\top} \alpha^{-1} \varepsilon) = \\ &\varepsilon^{\top} \alpha^{-1} \varepsilon \;-\; \varepsilon^{\top} \alpha^{-1} A V A^{\top} \alpha^{-1} \varepsilon \end{aligned} \tag{13}$$

где ε — (неизвестный нам) шум в данных, V — матрица ковариации оценок.

Теперь нетрудно найти математическое ожидание R, принимая во внимание, что для любого вектора x и квадратной матрицы M соответствующей размерности справедливо $x^\top M x = \mathrm{Sp}(x^\top x\, M)$:

$$\mathcal{E}(R) = \mathrm{Sp}(\alpha^{-1}\,\mathrm{Cov}\,\varepsilon) - \mathrm{Sp}(\mathrm{Cov}\,\varepsilon\,\alpha^{-1} A\, V A^\top \alpha^{-1}) \tag{14}$$

где значком Sp обозначен след матрицы[1].

Если предположить, что матрица обратных весов α была выбрана так, что она равнялась ковариационной матрице шума, выражение (15) можно преобразовать к такому виду:

$$\mathcal{E}(R) = n - \Big(m - l - \mathrm{Sp}(V\, B^\top \beta^{-1} B)\Big) \tag{15}$$

где n — число уравнений, m — число неизвестных, l — число условий связи.

Вычислив взвешенную сумму квадратов остаточных невязок и сравнив полученное значение с математическим ожиданием, найденным по формуле (15), мы можем сделать вывод о том, насколько соответствует детерминированная модель наблюдений, описывающая влияние оцениваемых параметров на наблюдения, и стохастическая модель измерения, описывающая вклад в измеренную величину от немоделируемых факторов. Если детерминированная модель наблюдений, задаваемая матрицей A, полна, при получении численного решения не была потеряна точность, ковариационная матрица шума диагональная и известная нам точно, то отношение $\dfrac{R}{\mathcal{E}(R)}$ будет равно 1. Неполнота модели приводит к тому, что немоделируемая составляющая о-с, "шум" будет представлять собой сумму погрешности измерения и систематической ошибки. Следствием систематических ошибок будет являться увеличение диагональных членов ковариационной матрицы и появления внедиагональных членов. В результате отношение $\dfrac{R}{\mathcal{E}(R)}$ на практике редко бывает равно 1.

Можно воспользоваться выборочной оценкой $\mathcal{E}(R)$ для уточнения матрицы обратных весов. Предположим, что отличие отношения $\dfrac{R}{\mathcal{E}(R)}$ от

[1] При вычислении следа произведения матриц следует иметь в виду, что для любых матриц соответствующей размерности $\mathrm{Sp}(AB^\top) = \sum\limits_{i,j} a_{ij} b_{ij}$, поэтому нет необходимости вычислять произведение двух матриц

1 обусловлено неправильным выбором матрицы α. Рассмотрим два случая.

I. *Мультипликативная модель.* Предположим, что $\alpha = \frac{1}{p^2} \operatorname{Cov} \varepsilon$, то есть все наши оценки погрешности каждого измерения, на основании которых были вычислены диагональные элементы матрицы обратных весов, занижены в p раз. Нетрудно установить, что математическое ожидание от R для такого случая будет равно $p^2 \left(n - (m - l - \operatorname{Sp}(V\, B^{\top} \beta^{-1} B))\right)$. Отсюда можно выразить p:

$$p = \sqrt{\frac{\mathcal{E}(R)}{n - \left(m - l - \operatorname{Sp}(V\, B^{\top} \beta^{-1} B)\right)}} \tag{16}$$

Подставив вместо математического ожидания от взвешенной суммы квадратов остаточных невязок (которое нам, естественно, неизвестно) найденное значение для R в качестве приближённой оценки $\mathcal{E}(R)$, мы можем определить p и тем самым уточнить матрицу обратных весов. Далее мы можем получить новое решение с новой матрицей веса. Итерации можно выполнять до тех пор, пока отношение $\dfrac{R}{\mathcal{E}(R)}$ не станет достаточно близко к 1. На практике приемлемым значением этого отношения можно считать 0.7–1.5 Заметим, что если не накладываются стабилизирующие ограничения, то оценка $\hat{x}$ не зависит от p, а от p зависит только матрица ковариации оценок. Поэтому в этом случае новое решение с корректированным весом будет отличаться от старого только тем, что оценки среднеквадратического уклонения параметров будут в p раз больше.

II. *Аддитивная модель.* Предположим, что $\alpha = \operatorname{Cov} \varepsilon - q^2 I$, где I — единичная матрица размерностью $n \times n$. Это предположение эквивалентно тому, что принятые значения дисперсии одного измерения для всех наблюдений меньше истинных дисперсий на некую константу q. Математическое ожидание взвешенной суммы остаточных невязок для этого случая будет равняться следующей величине:

$$\begin{gathered}\mathcal{E}(R) = \\ n - (m - l - \operatorname{Sp}(V\, B^{\top} \beta^{-1} B)) + q^2 \left[\operatorname{Sp}(\alpha^{-1}) - \operatorname{Sp}(V\, A^{\top} \alpha^{-2} A)\right]\end{gathered} \tag{17}$$

Отсюда выразим q:

$$q = \sqrt{\frac{\mathcal{E}(R) - \Big(n - (m - l - \mathrm{Sp}(V\,B^{\top}\beta^{-1}B))\Big)}{\mathrm{Sp}(\alpha^{-1})\ -\ \mathrm{Sp}(V\,A^{\top}\alpha^{-2}A)}} \tag{18}$$

Заметим, что если q оказывается мнимым, то это означает, что в рамках рассматриваемой модели принятые значения дисперсии одного измерения оказались больше истинных. Так же как и в мультипликативной модели, выполнив несколько итераций, можно найти такую аддитивную коррекцию априорной дисперсии единичного измерения, которая обеспечит близость отношения $\dfrac{R}{\mathcal{E}(R)}$ к 1.

Аддитивная модель перевзвешивания позволяет частично учесть влияние систематических ошибок на оценку точности конечного результата. При этом следует учитывать два фактора. При наличии систематических ошибок ковариационная матрица шума в общем случае является недиагональной. При аддитивной модели превзвешивания мы пренебрегаем недиагональными членами. Это довольно грубое приближение, хотя оно лучше, чем вообще полное игнорирование систематических ошибок. Во-вторых, вычисляя коррекцию q, мы заменяем математическое ожидание суммы квадратов невязок на саму сумму. Это приближённая операция, которая становится корректной лишь при большом количестве наблюдений. Перевзвешивание, конечно же, не может полностью исключить влияние систематических ошибок на результат, но позволяет в некоторой степени ослабить их влияние.

При обработке РСДБ наблюдений предлагается поступать следующим образом. На первом шаге добавляем к априорной дисперсии каждого измерения групповой задержки, рассчитанной на основе отношения сигнал/шум функции когерентности, аддитивную константу: $50\mathrm{ps}^2$. После получения решения и его коррекции за выбросы, находим для каждой базы частичную взвешенную сумму квадратов невязок. Для каждой базы находим аддитивную коррекцию априорной дисперсии. Для этого формула (18) корректируется таким образом:

$$q_i = \sqrt{\frac{\mathcal{E}(R_i) - \Big(n_i - \mathrm{Sp}(V A^{\top}\alpha_i^{-1}A)\Big)}{\mathrm{Sp}(\alpha_i^{-1})\ -\ \mathrm{Sp}(V\,A^{\top}\alpha_i^{-2}A)}} \tag{19}$$

где $\mathcal{E}(R_i)$ — математическое ожидание от частичной взвешенной суммы квадратов невязок среди наблюдений i-й базы, а α_i^{-1} — частичная матрица обратных весов наблюдений i-й базы: если j-е наблюдение было выполнено не на i-й базе, то $\alpha_i^{-1}(j) = 0$. Производится аддитивная коррекция матрицы обратных весов и находится новое решение. Обычно достаточно выполнить 1–2 итерации, чтобы достичь $\dfrac{R}{\mathcal{E}(R)}$ в диапазоне $[0.7, 1.5]$. После этого оценки среднеквадратических уклонений параметров, которые определяются как квадратные корни от диагональных членов ковариационной матрицы оценок, делятся[2] на $\sqrt{\dfrac{R}{\mathcal{E}(R)}}$.

4 Оценивание параметров по наблюдениям многих серий.

Параметры оценивания можно сгруппировать следующим образом:

— *Глобальные параметры* — считающиеся постоянными для всех серий:

- Координаты станций.
- Координаты источников.
- Числа Лява.

— *Локальные параметры* — предполагающиеся меняющимися от серии к серии:

- Параметры вращения Земли: $UT1, \dfrac{\partial}{\partial t}UT1, X_p, Y_p, \Delta\psi, \Delta\varepsilon$.
- Тропосферная задержка в зените.
- Функция часов.

Так как локальные параметры одной серии не влияют на наблюдения другой серии, то общая матрица условных уравнений будет иметь очень много нулевых элементов. Для решения условной системы уравнений, матрица которых имеет подобную структуру, следует использовать многогрупповой метод наименьших квадратов, предложенный Каула [8]

[2]При этом мы пренебрегаем влиянием на оценки мультипликативной коррекции веса вследствие наложения стабилизирующих ограничений

(см. также [9]), который позволяет учесть разреженность матрицы условных уравнений и особенность её структуры. Формулы многогруппового МНК приведены в приложении B. Подчеркнём, что процедура многогруппового метода наименьших квадратов не является приближённой, а является точной: классический МНК и многогрупповой МНК дадут одинаковые результаты, но при использовании классического МНК необходимо обернуть матрицу размерностью $m \times m$, где m — число переменных; вычислительная сложность такой процедуры оказывается порядка $\frac{1}{2}m^3$ сложений и умножений. Вычислительная сложность многогруппового МНК в предположении, что количество локальных параметров во всех сериях одинаково, составляет $\frac{1}{2}g^3 + n(\frac{1}{2}l^3 + \frac{1}{2}l^2 g + \frac{3}{2}lg^2)$ операций сложения и умножения, где g — число глобальных параметров, l — число локальных параметров, n — число серий. Так, при обработке четырёхлетнего ряда РСДБ наблюдений, выполненных по программе IRIS, мы получили n=300, l=90, g=50. Для этого случая многогрупповой МНК требует в 35 000 раз меньше вычислительных операций, чем традиционный подход.

Так как ничем принципиальным многогрупповой МНК не отличается от традиционного, ограничимся следующими замечаниями:

- Наложение условий связи в форме, описанной в приложении A, не вызывает никаких затруднений, если ограничения касаются глобальных параметров. В этом случае после нахождения ковариационной матрицы глобальных параметров следует произвести её коррекцию, как и при традиционном подходе (формулы 41, 43). Однако принятый способ нахождения оценок с условиями связи не работает, если ограничения накладываются на локальные параметры. Если возникла необходимость накладывать ограничения на локальные параметры, следует расширить нормальную матрицу локальных параметров, включив в неё уравнения ограничений; впрочем, в этом случае лучше перейти к другим параметрам, не требующих условий связи. И наконец, многогрупповой МНК не может быть реализован, если в качестве условий связи используются соотношения связи между локальными и глобальными параметрами.

- Не вызывает проблем наложение стабилизирующих ограничений. Достаточно просто добавить к матрицам нормальных уравнений соответствующую коррекцию.

- Отбраковка выбросов и перевзвешивание выполняется на обратном прогоне. Аддитивная коррекция априорной дисперсии измерения групповой задержки находится по следующей формуле:

$$q_k = \sqrt{\frac{\mathcal{E}(R_k) - (n_k - (\operatorname{Sp} V_{kk}N_{kk} - 2\operatorname{Sp} V_{ok}N_{ok} + \operatorname{Sp} V_{oo}\tilde{N}_{oo,k})}{\operatorname{Sp}\alpha_{kk}^{-1} - (\operatorname{Sp} V_{kk}\bar{N}_{kk} - 2\operatorname{Sp} V_{ok}\bar{N}_{ok} + \operatorname{Sp} V_{oo}\bar{N}_{oo,k})}} \qquad (20)$$

где $\bar{N}_{kk}$, $\bar{N}_{ok}$, $\bar{N}_{oo,k}$ — нормальные матрицы с квадратом веса. После окончания обратного прогона и вычисления аддитивной коррекции для всех серий, приходится снова выполнять оба прогона глобального решения. Для уменьшения объёма вычислений оказывается полезным следующий трюк: на обратном прогоне сделать одну дополнительную итерацию перевзвешивания для локальных параметров. Это позволяет уменьшить количество итераций глобального решения. Практика показала, что достаточно ограничиться одной итерацией на обратном прогоне для каждой серии и одной итерацией глобального решения.

5 Абсолютизация систем координат.

При одновременном оценивании координат станций и их скоростей, координат источников, параметров вращения Земли матрица условных уравнений оказывается неполного ранга, а соответствующая ей нормальная матрица — вырожденной. Причина этого состоит в том, что

1. мы не можем определить начало земной системы координат: задержка инвариантна относительно произвольного параллельного переноса всей системы координат;

2. мы не можем отделить поворот земной системы координат на произвольный угол от поворота системы параметров вращения Земли на этот же угол с противоположным знаком;

3. мы не можем определить переносную скорость земной системы координат: задержка инвариантна относительно изменения координат станций, вызванного произвольной переносной скоростью всей системы координат;

4. мы не можем отделить вращения земной системы координат с произвольный угловой скоростью от векового изменения параметров вращения Земли;

5. мы не можем отделить поворот небесной системы координат на произвольный угол от поворота системы параметров вращения Земли на этот же угол с противоположным знаком;

Из-за инвариантности разностной задержки распространения сигнала относительно группы преобразований систем координат, между параметрам возникают сложные линейные зависимости.

Преодолеть неполноту ранга матрицы условных уравнений по причине 1, 3 можно следующим образом: 1) не оценивать координаты и скорости опорной станции; 2) наложить ограничение $\sum \Delta\vec{\mathbf{r}}_i = \mathrm{const}, \quad \sum \vec{\mathbf{v}}_i = \mathrm{const}$, где $\Delta\vec{\mathbf{r}}_i$ — вектор поправок к координатам для i-ой станции, $\vec{\mathbf{r}}_i$ — вектор скорости i-ой станции.

Для того, чтобы преодолеть неполноту ранга матрицы условных уравнений по причине 2, 5 следует потребовать, чтобы новая система координат преобразовывалась в старую систему посредством поворота на заданные углы.

Аналогично, неполнота ранга, обусловленная пунктом 4, преодолевается, если потребовать, чтобы поле скоростей станций имело заданную угловую скорость.

Всего для решения поставленной задачи необходимо ввести 16 произвольных констант решения, которые в принципе не могут быть измерены при РСДБ наблюдениях, но которые необходимы для вывода систем координат и серий ПВЗ:

- $\vec{\mathbf{c}}$ — вектор трансляции ЗСК.
- $\vec{\mathbf{v}}_\Pi$ — вектор переносной скорости ЗСК.
- $\vec{\mathbf{\Phi}}_t$ — вектор малого поворота ЗСК.
- $\vec{\mathbf{\Omega}}$ — вектор угловой скорости ЗСК.
- t — начальная эпоха ЗСК.
- $\vec{\mathbf{\Phi}}_c$ — вектор малого поворота НСК.

Предлагается следующий подход к преодолению указанных трудностей.

I. Накладываются условия связи, соответствующие следующему выбору констант: $\vec{\mathbf{c}} = 0, \quad \vec{\mathbf{v}}_\Pi = 0, \quad \vec{\mathbf{\Phi}}_s \quad \vec{\mathbf{\Omega}} = 0, \quad \vec{\mathbf{\Phi}}_c = 0$. Начальная эпоха определяется как средневзвешенный момент времени среди наблюдений, включённых в обработку, в целях уменьшения числа обусловленности матрицы нормальных уравнений.

Предварительное решение, соответствующее такому выбору констант, назовём нулевым решением.

II. Нулевое решение неявно зависит от априорных координат источников и станций, а также ПВЗ, использованных в редукционных вычислениях. Далее мы должны либо явно задать значения произвольных констант решения, либо определить условия, позволяющие найти эти константы. На основе этих граничных условий выполняем преобразование, которое назовём абсолютизацией, трансформирующее предварительные системы координат в окончательные в соответствии с явно заданными граничными условиями, определяющими 16 произвольных констант решения.

5.1 Составление уравнений связи.

Уравнения условий связи, определяющие условия равенства нулю параллельного переноса ЗСК и переносной скорости ЗСК, тривиальны:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \Delta\vec{\mathbf{r}}_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{m} \Delta\vec{\mathbf{v}}_i = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

где суммирование производится по всем станциям.

Уравнения условий связи, определяющие равенство нулю поворота земной системы координат, можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta\vec{\mathbf{\Phi}}_i = 0 \tag{22}$$

где $\Delta\vec{\mathbf{\Phi}}_i$ — вектор малого поворота координат i-ой станции, эквивалентного тангенциальной компоненте вектора поправки к координатам.

Разложим вектор поправки к координатам станций на нормальную и тангенциальную составляющую: $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \Delta\vec{\mathbf{r}}_n + \Delta\vec{\mathbf{r}}_t$. Представим тангенциальную компоненту как $\Delta\vec{\mathbf{r}}_t = \vec{\mathbf{\Phi}} \times \vec{\mathbf{r}}$. Для того, чтобы найти выражение для Φ, умножим слева вектор $\vec{\mathbf{r}}$ на $\Delta\vec{\mathbf{r}}$:

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}} \times (\Delta\vec{\mathbf{r}}_n + \vec{\mathbf{\Phi}} \times \vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{r}} \times \Delta\vec{\mathbf{r}}_n + \vec{\mathbf{r}} \times (\vec{\mathbf{\Phi}} \times \vec{\mathbf{r}}) = r^2\vec{\mathbf{\Phi}}$$

Отсюда находим $\vec{\mathbf{\Phi}} = \dfrac{\vec{\mathbf{r}} \times \Delta\vec{\mathbf{r}}}{r^2}$. Можно явно выписать компоненты вектора $\vec{\mathbf{\Phi}}$ в декартовой системе координат:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Phi_1 & = & \dfrac{r_2}{r^2}\Delta r_3 - \dfrac{r_3}{r^2}\Delta r_2 \\ \\ \Phi_2 & = & \dfrac{r_3}{r^2}\Delta r_1 - \dfrac{r_1}{r^2}\Delta r_3 \\ \\ \Phi_3 & = & \dfrac{r_1}{r^2}\Delta r_2 - \dfrac{r_2}{r^2}\Delta r_1 \end{array} \right. \tag{23}$$

Уравнения условий связи, определяющие равенство нулю вращения земной системы координат, строятся аналогично, только вектор малого поворота координат станции заменяется вектором угловой скорости:

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta\vec{\mathbf{\Omega}}_i = 0 \tag{24}$$

выражение для которого можно по аналогии с (23) сразу записать в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Omega_1 & = & \dfrac{r_2}{r^2}\Delta v_3 - \dfrac{r_3}{r^2}\Delta v_2 \\ \\ \Omega_2 & = & \dfrac{r_3}{r^2}\Delta v_1 - \dfrac{r_1}{r^2}\Delta v_3 \\ \\ \Omega_3 & = & \dfrac{r_1}{r^2}\Delta v_2 - \dfrac{r_2}{r^2}\Delta v_1 \end{array} \right. \tag{25}$$

Теперь найдём уравнения условий связи, определяющие равенство нулю поворота новой небесной системы координат. Для этого найдём выражение для вектора $\vec{\mathbf{\Phi}}$ в полярных координатах. Выпишем тангенциальную составляющую приращения координат:

$$\Delta\vec{\mathbf{r}}_t = |r| \left(\begin{array}{ccc} -\sin\delta\cos\alpha\cdot\Delta\delta & - & \cos\delta\sin\alpha\cdot\Delta\alpha \\ -\sin\delta\sin\alpha\cdot\Delta\delta & + & \cos\delta\cos\alpha\cdot\Delta\alpha \\ \cos\delta\cdot\Delta\delta & & \end{array} \right) \tag{26}$$

Вычислив векторное произведение $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{r}}_t$, получим искомое выражение для $\vec{\mathbf{\Phi}}$ в полярной системе координат:

$$\left\{ \begin{array}{lcrr} \Phi_1 & = & \sin\alpha\cdot\Delta\delta & -\cos\delta\cos\alpha\sin\delta\cdot\Delta\alpha \\ \Phi_2 & = & -\cos\alpha\cdot\Delta\delta & -\cos\delta\sin\alpha\sin\delta\cdot\Delta\alpha \\ \Phi_3 & = & & \cos^2\delta\cdot\Delta\alpha \end{array} \right. \tag{27}$$

Просуммировав каждое из равенств (27) по всем источникам и приравняв сумму нулю, получим искомые уравнения

Попутно получим и обратное преобразование: найдём приращения полярных координат, обусловленные поворотом на малые углы, заданные вектором поворота $\vec{\boldsymbol{\Psi}}$:

$$\vec{\boldsymbol{\Psi}} \times \vec{\mathbf{r}} = \Delta\vec{\mathbf{r}}_t$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r\cos\delta\cos\alpha \\ r\cos\delta\sin\alpha \\ r\sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\delta\cos\alpha\cdot\Delta\delta - r\cos\delta\sin\alpha\cdot\Delta\alpha \\ -r\sin\delta\sin\alpha\cdot\Delta\delta + r\cos\delta\cos\alpha\cdot\Delta\alpha \\ \quad r\cos\cdot\Delta\delta \end{pmatrix}$$

Раскрыв в левой части векторное произведение и сократив его на r, мы получим:

$$\begin{cases} \Psi_2\sin\delta & -\Psi_3\cos\delta\sin\alpha & = & -\sin\delta\cos\alpha\cdot\Delta\delta & -\cos\delta\sin\alpha\cdot\Delta\alpha \\ \Psi_3\cos\delta\cos\alpha & -\Psi_1\sin\delta & = & -\sin\delta\sin\alpha\cdot\Delta\delta & +\cos\delta\cos\alpha\cdot\Delta\alpha \\ \Psi_1\cos\delta\sin\alpha & -\Psi_2\cos\delta\cos\alpha & = & \cos\delta\cdot\Delta\delta & \end{cases}$$

Решив эту систему относительно $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$, получаем:

$$\begin{array}{lcrrr} \Delta\alpha & = & -\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta\,\Psi_1 & -\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta\,\Psi_2 & +\Psi_3 \\ \Delta\delta & = & \sin\,\Psi_1 & -\cos\alpha\,\Psi_2 & \end{array} \tag{28}$$

Таким образом у нас сформирована система из 15 уравнений связи. Формулы оценивания по методу наименьших квадратов при условии наложения на оценки ограничений, заданных в виде условий связи, описаны в приложении А. Заметим, что для оценок найденного нулевого решения уравнения связи (21), (22), (24) выполняются строго. Новая земная и небесная система координат сохраняют ту же ориентацию, что и старые системы координат, и тем самым неявно зависят от них. Предлагается следующая процедура абсолютизация систем координат, которая во-первых, позволяет избавиться от зависимости новых систем координат от старых, а во-вторых, обеспечивает привязку систем координат к стандартным системам.

5.2 Преобразование систем координат.

1. *Выбор начальной эпохи ЗСК.* Некоторая дата принимается за начальную эпоху — обычно это круглая дата: начало года или десятилетия. К координатам всех станций прибавляется коррекция

$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{v}}(t_f - t_e)$, где $\vec{\mathbf{v}}$ — скорость станции, t_f — принятая начальная эпоха, t_e — начальная эпоха нулевого решения.

2. *Коррекция за вращение ЗСК.* На основе либо каталога скоростей станций, либо тектонической модели рассчитывается угловая скорость ЗСК, построенной на основе станций, участвовавших в нулевом решении.

3. *Коррекция за переносную скорость ЗСК.* Одна из станций, которая оценивалась, принимается за опорную. Её скорость принимается равной некоторому фиксированному значению, например нулю или определяется из тектонической модели.

4. *Коррекция за поворот ЗСК.* Выбирается опорная дата, для которой принимаются фиксированные значения следующих ПВЗ: $UT1$, X, Y. По разности между фиксированными значениями ПВЗ и найденными из нулевого решения рассчитывается вектор малого поворота. К сериям ПВЗ, полученным из решения, прибавляются разности $UT1_f - UT1_o$, $X_f - X_o$, $Y_f - Y_o$, а от векторов координат станций вычитается вектор $\vec{\mathbf{\Phi}} \times \vec{\mathbf{r}}$, где $\vec{\mathbf{\Phi}}$ — найденный вектор поворота.

5. *Коррекция за сдвиг ЗСК.* Одна из станций, которая оценивалась, принимается за опорную. Координаты опорной станции явно задаются, например, берутся из какого-нибудь каталога.

6. *Коррекция за поворот НСК.* Выбирается опорная дата, для которой принимаются фиксированные значения углов нутации: $\Delta\psi$, $\Delta\varepsilon$ (логично выбрать ту же дату, для которой фиксировались $UT1$, X, Y, хотя это и необязательно). Кроме того, прямое восхождение одного из источников фиксируется. По разности между фиксированными значениями углов нутации и найденными из нулевого решения, а также по разности прямых восхождений опорного источника рассчитывается вектор малого поворота и коррекция к UT1. К сериям ПВЗ, полученным из решения, прибавляются коррекция $UT1$ и разности $\Delta\psi_f - \Delta\psi_o$, $\Delta\varepsilon_f - \Delta\varepsilon_o$, а от координат всех источников вычитается коррекция за найденный поворот.

Теперь выведем формулы для коррекции ПВЗ и систем координат. С относительной точностью 10^{-4} выражение для задержки можно записать в виде:

$$\tau = \frac{1}{c}(\hat{\mathcal{U}}^*\vec{\mathbf{b}})\,(\hat{\mathcal{J}}^*\vec{\underline{\mathbf{s}}}) \tag{29}$$

где $\vec{\mathbf{b}}$ —вектор базы в земной системе координат (ЗСК), $\vec{\underline{\mathbf{s}}}$ — единичный вектор направления на источник в небесной системы координат (НСК), $\hat{\mathcal{U}}^*$ — модифицированная матрица учёта суточного вращения и движения полюса Земли, а $\hat{\mathcal{J}}^*$ — модифицированная матрица прецессии-нутации. Эти матрицы можно представить в виде произведения матриц вращения относительно осей x, y, z:

$$\hat{\mathcal{U}}^* = \hat{\mathcal{R}}_z(-\tfrac{1}{k)}\,UT1\hat{\mathcal{R}}_y(X)\hat{\mathcal{R}}_x(Y)$$
$$\hat{\mathcal{J}}^* = \hat{\mathcal{R}}_z(\Delta\psi\sin\varepsilon_o)\hat{\mathcal{R}}_x(-\varepsilon_o-\Delta\varepsilon)\hat{\mathcal{R}}_z(-\Delta\psi)\hat{\mathcal{R}}_x(\varepsilon_o)\hat{\mathcal{R}}_z(-z)\hat{\mathcal{R}}_y(\theta)\hat{\mathcal{R}}_z(-\zeta_o)$$

где $k = 1.002\,737\,909$, $\quad X, Y$ — координаты полюса, ε_o — средний угол наклона эклиптики к экватору, $\Delta\psi, \Delta\varepsilon$ — углы нутации, а z, θ, ζ_o — углы Ньюкома-Андуайе, описывающие прецессионное движение. Найдём дополнительные матрицы поворотов $\Delta\hat{\mathcal{U}}^*$, $\Delta\hat{\mathcal{J}}^*$, порождаемые малым приращением ПВЗ: $\hat{\mathcal{U}}^*(UT1+\delta UT1,\, X+\delta X,\, Y+\delta Y) = \hat{\mathcal{U}}^*(UT1,\, X,\, Y)\cdot\delta\hat{\mathcal{U}}(\delta UT1,\, \delta X,\, \delta Y)$ и $\hat{\mathcal{J}}^*(\Delta\psi+\delta\psi,\, \Delta\varepsilon+\delta\varepsilon,\, \ldots) = \hat{\mathcal{J}}^*(\Delta\psi,\, \delta\varepsilon,\, \ldots)\cdot\delta\hat{\mathcal{J}}^*(\delta\psi,\, \delta\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \delta\hat{\mathcal{U}} &= \hat{\mathcal{R}}_x(\delta Y)\hat{\mathcal{R}}_y(\delta X)\hat{\mathcal{R}}_z(-\frac{1}{k}\,\delta UT1) \\ \delta\hat{\mathcal{J}}^* &= \hat{\mathcal{R}}_x(-\delta\varepsilon_o)\hat{\mathcal{R}}_y(\delta\psi\sin\varepsilon_o) \end{aligned} \tag{30}$$

Найдём теперь матрицы поворота НСК и ЗСК, а также соответствующие им коррекции ПВЗ при условии, что значение задержки сохраняется. Это условие можно записать в виде:

$$(\hat{\mathcal{U}}^*\vec{\mathbf{b}})\,(\hat{\mathcal{J}}^*\vec{\underline{\mathbf{s}}}) = (\hat{\mathcal{U}}^*\,\delta\hat{\mathcal{U}}\,\hat{\Phi}_t\vec{\mathbf{b}})\,(\hat{\mathcal{J}}^*\,\delta\hat{\mathcal{J}}^*\,\hat{\Phi}_s\vec{\underline{\mathbf{s}}}) \tag{31}$$

Чтобы обеспечить выполнение граничных условий на углы нутации, необходимо ко всем полученным из нулевого решения углам нутации в наклонности прибавить поправку $\delta\varepsilon_f - \delta\varepsilon_e$, а к углам нутации в долготе — $\delta\psi_f - \delta\psi_e$. Здесь значком $_e$ отмечены найденные в нулевом решении углы нутации, а значком $_f$ обозначены фиксированные значения углов из граничных условий. Соответствующая матрица коррекции нутации-прецессии имеет вид: $\hat{\mathcal{R}}_x(-\Delta\varepsilon_f + \Delta\varepsilon_e)\hat{\mathcal{R}}_y((\Delta\psi_f - \Delta\psi_e)\sin\varepsilon_o)$. Из условия (31) находим матрицу поворота НСК, компенсирующую коррекцию углов нутации:

$$\hat{\Phi}_t = \hat{\mathcal{R}}_x(\Delta\varepsilon_f - \Delta\varepsilon_e)\hat{\mathcal{R}}_y((\Delta\psi_e - \Delta\psi_f)\sin\varepsilon_o) \tag{32}$$

Поворот $\hat{\Phi}_t$ в соответствие с (28) изменит прямое восхождение всех источников, в том числе и опорного следующим образом:

$$\Delta\alpha = -\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta\,(\Delta\varepsilon_f - \Delta\varepsilon_e) + \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta\,(\Delta\psi_f - \Delta\psi_e)\sin\varepsilon_o \tag{33}$$

Чтобы обеспечить выполнение граничного условия на прямое восхождение источника, необходимо выполнить поворот НСК относительно оси z на угол $\alpha_f - \alpha_e + \cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta\,(\Delta\varepsilon_f - \Delta\varepsilon_e) - \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta\,(\Delta\psi_f - \Delta\psi_e)\sin\varepsilon_o$. Здесь опять значком $_e$ отмечено прямое восхождение опорного источника, полученное в нулевом решении, а значком $_f$ отмечено значение прямого восхождения из граничного условия. Для компенсации вращения НСК относительно оси z выполним поворот ЗСК относительно оси z на тот же угол.

Чтобы обеспечить выполнение граничного условия на параметры вращения Земли Y, X, $UT1$, прибавим ко всем значениям Y, X, $UT1$ следующие коррекции: $Y_f - Y_e$, $X_f - X_e$, $UT1_f - UT1_e$. Теперь нетрудно найти матрицу поворота ЗСК: $\hat{\mathcal{R}}_x(Y_e - Y_f)\cdot\hat{\mathcal{R}}_y(X_e - X_f)\cdot\hat{\mathcal{R}}_z(\frac{1}{k}(UT1_f - UT1_e) + \alpha_f - \alpha_e + \cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta\,(\Delta\varepsilon_f - \Delta\varepsilon_e) - \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta\,(\Delta\psi_f - \Delta\psi_e)\sin\varepsilon_o$.

Запишем линейное преобразования ЗСК, переводящее старую систему координат в новую:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}}_n &= \vec{\mathbf{r}}_o + \Delta\vec{\mathbf{r}}_e + \vec{\mathbf{T}} + \vec{\mathbf{\Phi}} \times \vec{\mathbf{r}}_o + \left(\vec{\mathbf{V}}t + \vec{\mathbf{v}}_o + \vec{\mathbf{v}}_e + vc\Omega \times \vec{\mathbf{r}}_o\right)\Delta t \\ \vec{\mathbf{v}}_n &= \vec{\mathbf{v}}_o + \vec{\mathbf{v}}_e + \vec{\mathbf{V}} + \vec{\mathbf{\Omega}} \times \vec{\mathbf{r}}_o \end{aligned} \tag{34}$$

где $\vec{\mathbf{r}}_n$ — вектор станции в новой системе координат, $\vec{\mathbf{r}}_o$ — вектор станции в старой системе координат, $\Delta\vec{\mathbf{r}}_e$ — найденная из нулевого решения поправка координат станции, $\vec{\mathbf{T}}$ — вектор параллельного переноса преобразования, $\vec{\mathbf{\Phi}}$ — вектор поворота преобразования, $\vec{\mathbf{v}}_o$ — вектор скорости станции в старой системе координат (и используемой в качестве априорной скорости при проведении редукций), $\vec{\mathbf{v}}_e$ — найденная из нулевого решения скорость станции, $\vec{\mathbf{V}}$ — вектор переносной скорости преобразования, $\vec{\mathbf{\Omega}}$ — вектор угловой скорости преобразования, а $\Delta t = t_c^f - t_c^e$, где t_c^f — эпоха каталога координат станций в новой системе, t_c^e — момент времени, для которого получены поправки координат данной станции в нулевом решении.

Найдём теперь параметры линейного преобразования ЗСК такие, чтобы новая система координат удовлетворяла граничным условиям[3]. Для этого запишем 4 векторных уравнения. Для получения первого уравнения найдём суммарный поворот новой ЗСК относительно старой системы:

$$\begin{gathered}\sum \frac{r_2}{r^2}\Delta r_3 - \sum \frac{r_3}{r^2}\Delta r_2 \\ \sum \frac{r_3}{r^2}\Delta r_1 - \sum \frac{r_1}{r^2}\Delta r_3 \\ \sum \frac{r_1}{r^2}\Delta r_2 - \sum \frac{r_2}{r^2}\Delta r_1\end{gathered} \tag{35}$$

где $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_n - \vec{\mathbf{r}}_o$. Приравняем выражение для суммарного поворота новой системы относительно старой найденному повороту ЗСК. Напишем аналогичное выражение для угловой скорости, заменив $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ на $\Delta\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_n - \vec{\mathbf{v}}_o$, и приравняем его принятой угловой скорости станций. Два других уравнения получим, приравняв координаты и скорость для опорной станции в новой системе координат фиксированным значениям. Итого мы получаем систему из 12 уравнений с 12-ю неизвестными. Решив её найдём искомые параметры преобразования

Подытоживая, выпишем алгоритм преобразования абсолютизации:

1. Вычисляется вектор поворота НСК $\vec{\mathbf{\Phi}}^s$:

$$\begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_f - \Delta\varepsilon_e \\ \Delta\psi_f - \Delta\psi_e \\ \alpha_f - \alpha_e + \cos\alpha \operatorname{tg}\delta\left(\Delta\varepsilon_f - \Delta\varepsilon_e\right) - \sin\alpha \operatorname{tg}\delta\left(\Delta\psi_f - \Delta\psi_e\right)\sin\varepsilon_o \end{pmatrix}$$

[3]На первый взгляд может показаться, что мы можем вектор параллельного переноса системы координат и поворот системы координат определить независимо, но это не так. В силу того, что станций, участвующих в построении системы координат, как правило не много, и они распределены неравномерно, параллельный перенос вызовет непренебрежимо малый поворот системы координат.

2. Вычисляется вектор угловой скорости ЗСК $\vec{\mathbf{\Omega}}$:

$$\begin{pmatrix} \sum \frac{r_2}{r^2}\Delta v_3^f - \frac{r_3}{r^2}\Delta v_2^f \\ \sum \frac{r_3}{r^2}\Delta v_1^f - \frac{r_1}{r^2}\Delta v_3^f \\ \sum \frac{r_1}{r^2}\Delta v_2^f - \frac{r_2}{r^2}\Delta v_1^f \end{pmatrix}$$

здесь суммирование выполняется по всем станциям, для которых оценивались координаты. Символом $\vec{\mathbf{v}}^f$ обозначен вектор скорости станций из каталога или тектонической модели.

3. Вычисляется вектор поворота ЗСК $\vec{\mathbf{\Phi}}^t$:

$$\begin{pmatrix} Y_e - Y_f + \Omega_x \cdot (t - t_f) \\ X_e - X_f + \Omega_y \cdot (t - t_f) \\ \frac{1}{k}(UT1_f - UT1_e) + \Omega_z \cdot (t - t_f) + \alpha_f - \alpha_e + \\ \qquad \cos\alpha \,\mathrm{tg}\,\delta\,(\Delta\varepsilon_f - \Delta\varepsilon_e) - \sin\alpha \,\mathrm{tg}\,\delta\,(\Delta\varphi_f - \Delta\psi_e)\sin\varepsilon_o \end{pmatrix}$$

4. Для всех серий выполняется коррекция ПВЗ:

$$\begin{array}{lcl} \Delta\varepsilon & := & \Delta\varepsilon + \Delta\varepsilon_f - \Delta\varepsilon_e \\ \Delta\psi & := & \Delta\psi + \Delta\psi_f - \Delta\psi_e \\ X & := & X + X_f - X_e - \Omega_y \cdot (t - t_f) \\ Y & := & Y + Y_f - Y_e - \Omega_x \cdot (t - t_f) \\ UT1 & := & UT1 + \dfrac{1}{k}UT1_f - UT1_e - \Omega_z \cdot (t - t_f) \end{array}$$

где t — момент времени, на который приводится значение параметра вращения Земли, t_f — момент времени, которому соответствуют фиксированные ПВЗ. Значок := означает, что левой части выражения присваивается правая часть.

5. Выполняется коррекция координат всех источников:

$$\begin{array}{lcl} \Delta\alpha & = & -\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta\,\Phi_1^s \;\; -\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta\,\Phi_2 \;\; + \Phi_3^s \\ \Delta\delta & = & \qquad\quad \sin\;\Psi_1 \qquad\quad -\cos\alpha\,\Psi_2 \end{array}$$

6. Вычисляются параметры преобразования ЗСК;

7. Вычисляется коррекция координат станций и поля скоростей в соответствии с найденными параметрами преобразования по формуле (34).

Заметим, что при выводе данного преобразования, во-первых, в выражении для задержки был отброшен член порядка $\frac{1}{c}\vec{\mathbf{V}}_{\oplus}\,\underline{\vec{\mathbf{s}}}$, где $\vec{\mathbf{V}}_{\oplus}$— вектор барицентрической скорости Земли, что внесло относительную погрешность порядка 10^{-4} , а во-вторых, все углы предполагались малыми, то есть отбрасывались величины порядка квадратов углов. Из этого следует, что для того, чтобы обеспечить точность преобразования углов не хуже 0.1 mas, углы поворота и коррекции ПВЗ не должны превышать одной угловой секунды.

В заключение следует подчеркнуть, что существует практически бесконечное количество вариантов выбора граничных условий для вычисления 16 произвольных констант. Конкретный вид преобразования абсолютизации зависит от вкусов человека, проводящего обработку наблюдений.

Приложения

A Учёт ограничений в форме условий связи.

Рассмотрим следующую задачу: задана избыточная система уравнений $y = Ax + \varepsilon$, где y — вектор наблюдений размерностью n, x — вектор параметров модели размерностью m, A — матрица частных производных от вектора y по вектору x размерностью $n \times m$. Вектор ε представляет собой "шум", в который собрана немоделируемая компонента y. Если известна ковариационная матрица шума — обозначим её $\alpha = \mathrm{Cov}(\varepsilon)$, то существует оценка обобщённого метода наименьших квадратов $\hat{x}$, которая доставляет минимум функционалу J:

$$J = (y - Ax)^{\top} \alpha^{-1} (y - Ax) \tag{36}$$

Приравняв нулю производные $\dfrac{\partial J}{\partial x}$ и разрешив полученное уравнение относительно x, получаем следующее выражение для оценки:

$$\hat{x} = (A^{\top} \alpha^{-1} A)^{-1} A^{\top} \alpha^{-1} y \tag{37}$$

Теперь изменим постановку задачи: введём систему уравнений связи $Cx = r$, где C — матрица размерности $q \times m$, r — вектор размерности q. Найдём оценку вектора x, которая минимизирует функционал (37) при условии $Cx = r$. Согласно общеизвестным правилам математического анализа условный минимум будет достигаться при условии, что частные производные от функционала $J_1 = (y - Ax)^{\top} \alpha^{-1} (y - Ax) + k(Cx - r)$ по x и по k будут равны 0. Приравняв нулю производные, мы получим следующую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} A^{\top} \alpha^{-1} A & + & C^{\top} \\ & C & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{\top} y \\ r \end{pmatrix} \tag{38}$$

Для решения системы (38) можно предложить два пути: 1) расширить матрицу нормальных уравнений $A^{\top} \alpha^{-1} A$, добавив блоки C и $C^{\top}$; 2) воспользовавшись леммой об обращении расширенной матрицы и предположив, что $(A^{\top} \alpha^{-1} A)^{-1}$ существует, выразить матрицу, обратную (38) в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} V_0 - V_0C^\top \left(CV_0C^\top\right)^{-1} CV_0 & V_0C^\top \left(CV_0C^\top\right)^{-1} \\ \left(CV_0C^\top\right)^{-1} CV_0 & \left(CV_0C^\top\right)^{-1} \end{pmatrix} \tag{39}$$

где $V_0 = (A^\top\alpha^{-1}A)^{-1}$. В этом случае оценку можно записать в таком виде:

$$\hat{x} = \left(V_0 - V_0C^\top \left(CV_0C^\top\right)^{-1} CV_0\right) A^\top\alpha^{-1}y + V_0C^\top \left(CV_0C^\top\right)^{-1} r \tag{40}$$

Нетрудно получить выражение для ковариационной матрицы найденной оценки:

$$\operatorname{Cov} x = V_0 - V_0C^\top \left(CV_0C^\top\right)^{-1} CV_0 \tag{41}$$

Теперь рассмотрим случай, когда матрица $(A^\top\alpha^{-1}A)$ имеет неполный ранг, и, следовательно, не существует $(A^\top\alpha^{-1}A)^{-1}$. Можно показать [10], что если в качестве матрицы условий связи выбрать такую матрицу C, которая не будет содержать ни одного вектора, линейно зависимого с векторами матрицы $(A^\top\alpha^{-1}A)$, то $\operatorname{rank}(A^\top\alpha^{-1}A + C^\top C) = \operatorname{rank}(A^\top\alpha^{-1}A) + \operatorname{rank}(C^\top C)$. Если матрица $A^\top\alpha^{-1}A + C^\top C$ невырождена, то можно умножить второе уравнение (38) слева на $C^\top$ и прибавить к первому, после чего, воспользовавшись леммой об обращении блочной матрицы, записать решение в таком виде:

$$\hat{x} = \left(V_1 - V_1C^\top \left(CV_1C^\top\right)^{-1} CV_1\right) A^\top\alpha^{-1}y + V_1C^\top \left(CV_1C^\top\right)^{-1} r \tag{42}$$

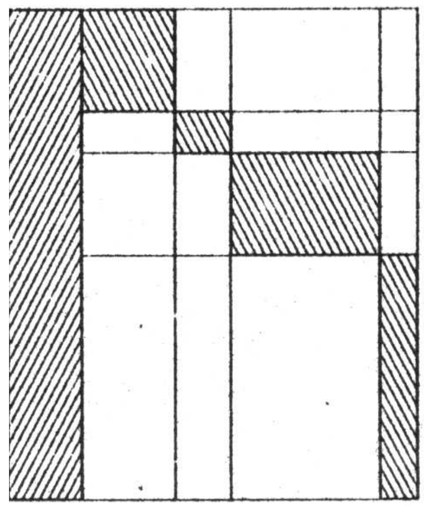
где $V_1 = \left(A^\top\alpha^{-1}A + C^\top C\right)^{-1}$.

Ковариационная матрица оценки имеет вид:

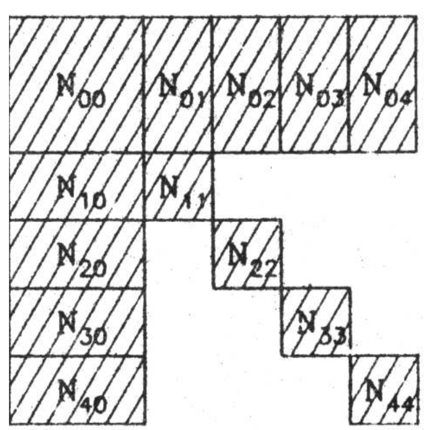
$$\operatorname{Cov} x = V_1 - V_1C^\top \left(CV_1C^\top\right)^{-1} CV_1 \tag{43}$$

B Многогрупповой МНК.

Рассмотрим задачу оценивания по методу наименьших квадратов для случая, когда матрица условных уравнений имеет специальный вид:



Здесь заштрихованы те элементы матрицы, которые являются ненулевыми. Такой вид матрица приобретает, когда не все параметры зависят от всех наблюдений. Если удаётся разделить параметры на глобальные, которые зависят от всех (или почти всех) наблюдений и локальные, которые зависят только от группы параметров, то возможно применение специального алгоритма, который существенно сокращает количество вычислительных операций. Условной матрице такого вида соответствует матрица нормальных уравнений следующего вида:

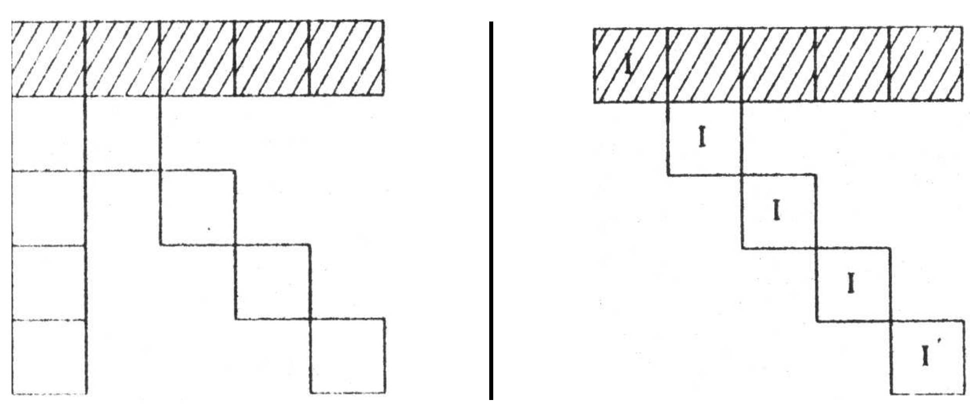


Мы видим, что, во-первых, значительная часть элементов матрицы является нулевыми, а во-вторых, матрица имеет регулярную структуру:

она окаймлённая, блочно-диагональная, квадратная, симметричная. При обращении матрицы следует использовать эти пустоты. Для обращения воспользуемся стандартной процедурой исключения Гаусса-Жордана [11], но операции будем выполнять не над отдельными элементами матрицы, а над целыми блоками. Напомним, что процедура исключения состоит в том, что выполняются операции умножения строки (или столбца) матрицы на константу и сложения между собой строк (или столбцов) матрицы с тем, чтобы превратить обращаемую матрицу в единичную. Если эти же операции умножения и сложения строк выполнить над единичной матрицей, то результатом операций будет являться матрица, обратная исходной. Для обоснования алгоритма заметим, что операции умножения строки (столбца) на константу и сложения строк (столбцов) можно представить как умножение слева матрицы преобразования на обрабатываемую. Если записать последовательность таких операций: $P_j \cdot P_{j-1} \cdot \ldots \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot M = I$, то легко можно увидеть, что $P_j \cdot P_{j-1} \cdot \ldots \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot I$ действительно будет матрицей, обратной M.

Запишем слева исходную матрицу, а справа единичную. Алгоритм обращения окаймлённой, блочно-диагональной, квадратной, симметричной матрицы состоит из 4-х шагов:

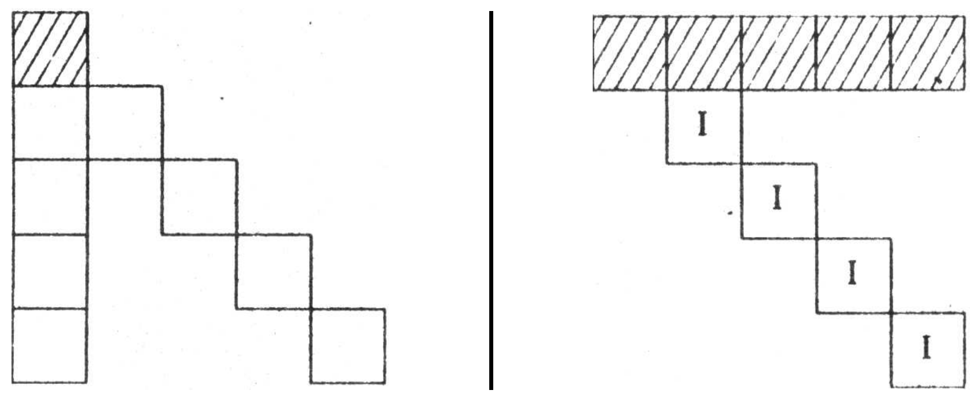
I. *Исключение элементов o-ряда.* Каждую строку блоков, кроме нулевой, умножаем слева на $M_{oi}M_{ii}^{-1}$ и вычитаем из нулевой строки блоков:



$L_{oo} := M_{oo} - \sum_i M_{oi}M_{ii}^{-1}M_{io}$ $\qquad R_{oi} := -M_{oi}M_{ii}^{-1}$

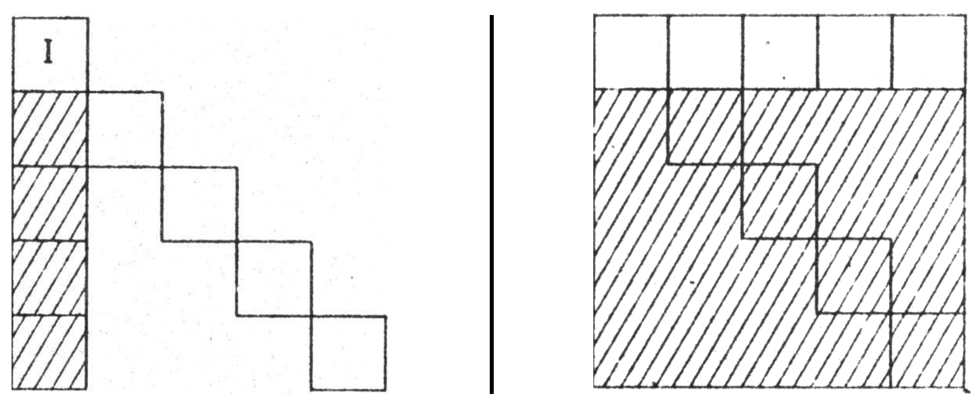
$L_{oi} := 0$

II. *Получение элемента oo обратной матрицы.* Строку блоков oi умножаем слева на блок L_{oo}^{-1}.



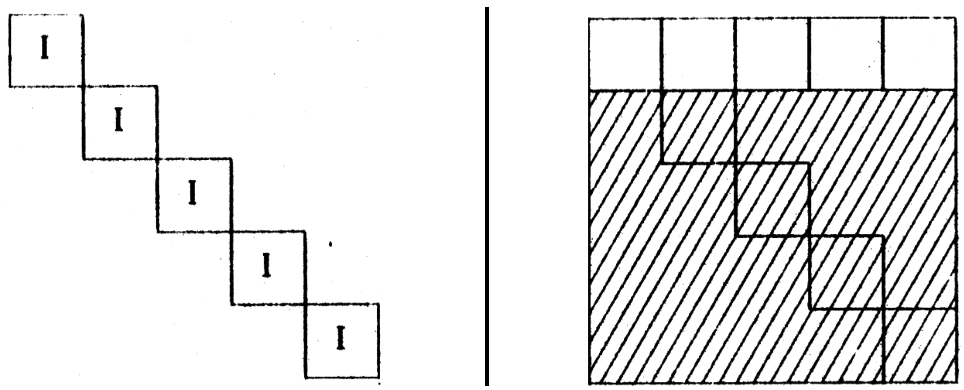
$$L_{oo} := I \qquad R_{oo} := \left(M_{oo} - \sum_i M_{oi} M_{ii}^{-1} M_{io} \right)^{-1}$$
$$R_{oi} := R_{oo} R_{oi} = -R_{oo} M_{oi} M_{ii}^{-1}$$

III. *Исключение элементов о-колонки.* От каждой строки блоков, кроме нулевой, вычитаем строку оо, умноженную слева на M_{io}:



$$L_{io} := I \qquad R_{ii} := R_{ii} - M_{io} R_{oi} = I + M_{io} R_{oo} M_{oi} M_{ii}^{-1}$$
$$\forall i \neq j \quad R_{ij} := R_{ij} - M_{io} R_{oj} = M_{io} R_{oo} M_{oj} M_{jj}^{-1}$$

IV. *Получение элементов ii обратной матрицы.* Каждую строку умножаем слева на блок M_{ii}^{-1}.



$$L_{ii} := I \qquad R_{ii} := M_{ii}^{-1}R_{ii} = M_{ii}^{-1} + M_{ii}^{-1}M_{io}R_{oo}M_{oi}M_{ii}^{-1}$$
$$\forall i \neq j \quad R_{ij} := M_{ii}^{-1}R_{ij} = M_{ii}^{-1}M_{io}R_{oo}M_{oj}M_{jj}^{-1}$$

Окончательно мы можем записать выражения для блоков матрицы $V = M^{-1}$ в следующем виде:

$$\begin{array}{rcl} V_{oo} & = & (M_{oo} - \sum_i M_{oi}M_{ii}^{-1}M_{io})^{-1} \\ V_{ii} & = & M_{ii}^{-1} + M_{ii}^{-1}M_{io}V_{oo}M_{oi}M_{ii}^{-1} \\ V_{ij} & = & M_{ii}^{-1}M_{io}V_{oo}M_{oj}M_{jj}^{-1} \\ V_{oi} & = & -V_{oo}M_{oi}M_{ii}^{-1} \end{array} \tag{44}$$

Найдём решение системы линейных уравнений, левой частью которой является квадратная, окаймлённая, блочно-диагональная, симметричная матрица.

Разобьём вектор правых частей на сегменты, аналогичные блокам матрицы, стоящей в левой части:

$$\begin{pmatrix} c_o^g \\ c_1^l \\ c_2^l \\ \dots \\ c_n^l \end{pmatrix} \tag{45}$$

Найдём вектор глобальных параметров:

$$\begin{array}{rcl} \hat{x}_o & = & V_{oo}c_o^g + \sum_i V_{oi}c_o^l = V_{oo}c_o^g - \sum_i V_{oo}N_{oi}N_{ii}^{-1}c_i^l \\ & = & V_{oo}(c_o^g - \sum_i N_{oi}N_{ii}^{-1}c_i^l) \end{array} \tag{46}$$

Вектор локальных параметров выражается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_i &= V_{io}c_o^g + \sum_{j=1}^{n} V_{ij}c_j^l \\
&= -N_{ii}^{-1}N_{io}V_{oo}c_o^g + N_{ii}^{-1}c_i^l + \sum_{j=1}^{n} N_{ii}^{-1}N_{io}V_{oo}N_{oj}N_{jj}^{-1}c_j^l \\
&= -N_{ii}^{-1}N_{io}\,V_{oo}(c_o^g + \sum_{j=1}^{n} N_{oj}N_{jj}^{-1}c_j^l) + N_{ii}^{-1}c_i^l \\
&= N_{ii}^{-1}c_i^l - N_{ii}^{-1}N_{io}\hat{x}_o^g
\end{aligned} \tag{47}$$

Используя описанный выше приём обращения блочно-диагональной, симметричной, квадратной матрицы, можно предложить следующий алгоритм многогруппового метода наименьших квадратов:

I. *Инициализация аккумуляторов.*

II. *Прямой прогон.* Для каждой серии выполняются следующие операции:

   2.1 Формируются матрица условных уравнений для глобальных параметров $A_{o,i}$ и матрица условных уравнений локальных параметров A_i, а также вектор правых частей y.

   2.2 Вычисляется нормальная матрица локальных параметров $N_{ii} = A^{\top}{}_i A_i$, частичная матрица глобальных параметров, учитывающая вклад параметров i-й серии в блок глобальных параметров $\tilde{N}_{oo,i} = A^{\top}{}_{o,i}A_{o,i}$ и смешанная матрица глобальных и локальных параметров $N_{io} = A^{\top}{}_i A_{o,i}$.

   2.3 Вычисляется нормальный вектор правых частей локальных параметров $c_i = A^{\top}{}_i y$ и частичный нормальный вектор правых частей глобальных параметров, учитывающей вклад параметров i-й серии: $c_{o,i}^g = A^{\top}{}_{o,i}y$.

   2.4 Вычисляется матрицы $B_{io} = N_{ii}^{-1}N_{io}$.

   2.5 Обновляется матрицы $W_{oo} := W_{oo} + \tilde{N}_{oo,i} - N_{oi}B_{io}$.

   2.6 Обновляется вектор $c_o^g := c_o^g + A^{\top}{}_{o,i}c_{,i}^g$.

   2.7 Обновляется вектор $c_o^l := c_o^l - B^{\top}{}_{oi}c_o^l$.

III. *Нахождение глобальных параметров.*

3.1 Вычисляется ковариационная матрица глобальных параметров: $V_{oo} = W_{oo}^{-1}$

3.2 Находится оценка для параметров: $\hat{x}_o = V_{oo}(c_o^g + c_o^l)$

IV. *Обратный прогон.* Для каждой серии выполняются следующие операции:

4.1 Вычисляются значения локальных параметров: $\hat{x}_i = N_{ii}^{-1}c_i^l - B_{io}\hat{x}_o$

4.2 Вычисляется ковариационная матрица локальных параметров: $V_{ii} = N_{ii}^{-1} + B_{io}V_{oo}B^{\top}{}_{io}$

4.3 Вычисляется взвешенная сумма квадратов остаточных невязок параметров i-ой серии: $R_i = \sum\limits_{k=1} \alpha_k^{-1}(y_k - A_{o,i}\hat{x}_o - A_i\hat{x}_i)^2$

4.4 Удаляются выбросы — наблюдения, чья взвешенная вариация более, чем в I (обычно I=3) раз превышает $\sqrt{R}$. После удаления выбросов выполняется коррекция оценок и ковариационной матрицы локальных параметров. Коррекция глобальных оценок не выполняется, так как это потребовало бы значительного увеличения количества операций. Если на данном шаге выбросов не было обнаружено — переход к следующему шагу, иначе — возврат к предыдущему.

4.5 Вычисляется математическое ожидание от суммы квадратов остаточных невязок параметров i-ой серии: $E(R_i) = \mathrm{Sp}(V_{oo}\tilde{N}_{oo,i}) - 2\,\mathrm{Sp}(V_{oo}B_{oi}N_{oi}) + \mathrm{Sp}(V_{ii}N_{ii})$

4.6 Обновляется сумма квадратов невязок и математического ожидания от этой величины для общего решения: $R := R + R_i \qquad E(R) := E(R) + E(R_i)$

Аналогичная процедура решения системы уравнений для матриц подобного вида были рассматривается в работах Каулы [8] и Ма [9].

Список литературы

[1] Петров Л.Ю. Вторичная обработка геодезических РСДБ наблюдений. I. Модель редукции. Сообщения ИПА № 74, Институт прикладной астрономии, Санкт-Петербург, 1995.

[2] Петров Л.Ю. Вторичная обработка геодезических РСДБ наблюдений. II. Модель редукции. Сообщения ИПА № 75, Институт прикладной астрономии, Санкт-Петербург, 1995.

[3] Sovers O.J. Observation model and pararmeter partials for the JPL VLBI parameter estimation software MODEST–1991. JPL Publication № 83–89, Rev. 4, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California, 1991.

[4] McCarthy D.D. (ed.). IERS Standards. IERS Technical Note, Observatoire de Paris, July 1992.

[5] Davis J.L., G. Elgered, A.E. Niell, E. Kuehn. Ground based measurements of gradient in the 'wet' refractivity of the air. *Radio Science*, **28** (6), pp. 1003–1018, 1993.

[6] Elgered G., J.L. Davis, T.A. Herring, I.I. Shapiro. Geodesy by radio interferometry: Water vapor radiometry for the estimation of the wet delay. *Journal of Geophysical Research*, **96**(4), pp. 6541–6556, 1991.

[7] Марпл С.Л. *Цифровой спектральный анализ и его приложения.* Наука, Москва, 1990.

[8] Каула У. *Спутниковая геодезия.* Мир, Москва, 1970.

[9] Ma C., J.M. Sauber, L.J. Bell, T.A. Clark, D. Gordon, W.E. Himwich, J.W. Ryan. Measurement of horizontal motions in Alaska using very long baseline interferometry. *Journal of Geophysical Research*, **95**(B13), pp. 21991–22011, 1990.

[10] Шеффе Г. *Дисперсионный анализ.* Наука, Москва, 1980.

[11] Журкин И.Г. *Методы вычислений в геодезии.* Наука, Москва, 1988.

РТП ЛИЯФ, Зак.   Тир. 180, Уч. Изд. л.

Бесплатно